MATEMÁTICA

Matemática – uma linguagem plena de significado

Aula 1 – Grandezas direta e inversamente proporcionais: significado

Quando x e y são duas grandezas diretamente proporcionais, elas aumentam ou diminuem simultaneamente, e na mesma proporção, ou seja, a razão y/x é constante, e resulta que **y = kx** (*k* é uma constante). **Quando x e y são duas grandezas inversamente proporcionais**, sempre que uma delas aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa, de modo que o produto das duas permanece constante: **x·y = k** em que *k* é uma constante. Os exercícios seguintes exploram tais formas de variação em diferentes contextos.

1. Em cada um dos casos abaixo, verifique se há ou não proporcionalidade. Se existir, expresse tal fato algebricamente, indicando o valor da constante de proporcionalidade.

a) A altura *a* de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade *t*?
b) A massa *m* de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade *t*?
c) O perímetro *p* de um quadrado é diretamente proporcional a seu lado *a*?
d) A diagonal *d* de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado *a*?
e) O comprimento *c* de uma circunferência é diretamente proporcional a seu diâmetro *d*?

2. A tabela abaixo relaciona os valores de três grandezas *x*, *y* e *z*, que variam de modo inter-relacionado.

x	1	3	4	5	10	15	40	50	60	75	120	150
y	7	21	28	35	70	105	280	350	420	525	840	1050
z	300	100	75	60	30	20	7,5	6	5	4	2,5	2

Verifique se os diversos pares de grandezas (*x* e *y*, *y* e *z*, *x* e *z*) são direta ou inversamente proporcionais. Justifique sua resposta.

3. Um prêmio P da loteria deve ser dividido em partes iguais, cabendo um valor *x* a cada um dos *n* ganhadores. Considere P = 400 000 reais e preencha a tabela abaixo:

n	1	2	4	5	8	10	20
x							

4. Para comprar presentes idênticos, a serem distribuídos em uma festa de aniversário, dispõe-se de uma quantia fixada Q. Vamos chamar de *x* o preço de cada um dos presentes, e de *y* o total de presentes a serem comprados. Mostre que *x* e *y* são inversamente proporcionais e que $x \cdot y = Q$.

Aula 2 – Crescimento, decrescimento, proporcionalidade

Quando observamos os valores de duas grandezas interdependentes *x* e *y*, e notamos que um aumento no valor de *x* acarreta um aumento no valor de *y*, ou então, um aumento no valor de *x* provoca uma diminuição no valor de *y*, somos tentados a dizer que *x* e *y* variam de modo diretamente proporcional, no primeiro caso, ou inversamente proporcional, no segundo. Entretanto, tais afirmações nem sempre são corretas, uma vez que, como já foi visto anteriormente, a proporcionalidade direta exige mais do que um aumento simultâneo nos valores de *x* e *y* (devemos ter y/x constante), e a inversa, mais do que uma diminuição de um deles quando o outro aumenta (devemos ter x·y constante). Os exercícios a seguir explorarão tal fato.

1. As tabelas abaixo relacionam pares de grandezas. Indique se existe ou não proporcionalidade (direta ou inversa).

a) Produção de Automóveis x Produção de Tratores (anual, em milhares)

Países	A	B	C	D	D	E	F	G	H
Automóveis	100	150	200	225	250	300	350	400	450
Tratores	8	12	16	18	20	24	28	32	36

b) Área destinada à Agricultura x Área destinada à Pecuária (em 1 000 km²)

Países	A	B	C	D	D	E	F	G	H
agricultura	80	100	110	120	150	160	180	200	250
Pecuária	60	70	80	98	100	124	128	132	136

c) Produto Interno Bruto (PIB, em milhões de dólares) x Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)

Países	A	B	C	D	D	E	F	G	H
PIB	300	400	510	620	750	760	880	1 000	1 100
IDH	0,90	0,92	0,80	0,88	0,78	0,89	0,91	0,80	0,86

d) Expectativa de vida (em anos) x Índice de analfabetismo (% da população)

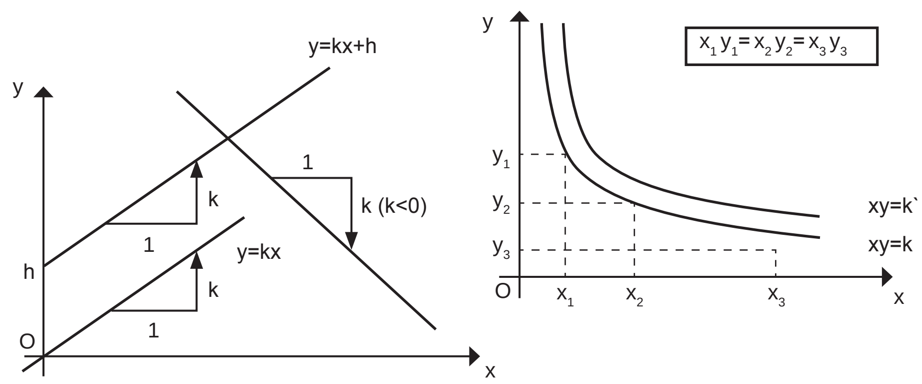
Países	A	B	C	D	D	E	F	G	H
Expectativa de vida	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Índice de analfabetismo	11	10	9	8	7	6	5	4	3

Aula 3 – Grandezas proporcionais e representações gráficas

Quando duas grandezas *x* e *y* variam de tal forma que y = kx + h (*k* e *h* constantes) existe uma proporcionalidade direta entre os valores de y – h e os de *x*. A representação gráfica correspondente é uma reta com inclinação *k*; *h* representa o valor inicial a partir do qual a variação em *y* é diretamente proporcional a *x*. Quando temos h = 0, então y = kx (*y* é diretamente proporcional a *x*) e a reta passa pela origem.

No caso da proporcionalidade inversa, ou seja, da relação xy = k, o gráfico correspondente é uma curva chamada hipérbole (ver figura abaixo).

Tais fatos serão explorados nos exercícios a seguir.



1. O preço P a cobrar em uma corrida de táxi é composto por uma quantia *a* fixada, igual para todas as corridas, mais uma parcela variável, que é diretamente proporcional ao número *x* de quilômetros rodados: P = a + b·x (*b* é o custo de cada quilômetro rodado).

Em certa cidade, temos P = 15 + 0,8·x (P em reais e *x* em km).

a) Qual o preço a cobrar por uma corrida de 12 quilômetros?
b) Calcule a diferença entre os preços de duas corridas, uma de 20 km, outra de 21 km.
c) Esboce o gráfico de P em função de *x*.

2. Na casa de uma família que gasta sempre cerca de 0,5 kg de gás de cozinha por dia, a massa de gás contido em um botijão doméstico de 13 kg varia com o tempo de acordo com a fórmula m = 13 – 0,5 t, em que *t* é o tempo em dias.

a) Calcule o número de dias necessários para consumir-se 6 kg de gás.
b) Calcule a massa de gás que resta em um botijão após 10 dias de uso.
c) Esboce o gráfico de *m* em função de *t*.

3. Fixada a temperatura T, a pressão P e o volume V de um gás variam segundo a expressão P·V = k (*k* é uma constante). Esboce o gráfico de P em função de V.

Aula 4 – Relacionando e analisando grandezas (tabelas)

Identificar a relação entre duas grandezas é um passo muito importante para estabelecer a expressão algébrica que representa essa relação. Um caminho interessante para se chegar à expressão algébrica é o de atribuir valores a uma das grandezas e descobrir quais seriam os valores correspondentes da outra. Praticaremos essa estratégia nesta aula.

1. Preencha as lacunas das tabelas analisando atentamente cada uma das situações descritas.

Para cada quilo da receita de um bolo são necessários três ovos.

Massa do bolo que se quer fazer (em kg)	2	5	9	13	17	x
Quantidade de ovos						

A tarifa de um taxi é cobrada da seguinte maneira: R$ 3,40 a bandeirada, mais R$ 2,50 por quilômetro rodado.

Quantidade de km rodados no táxi	1	2	3	4	5	x
Preço da viagem (em R$)						

Uma torneira totalmente aberta enche uma caixa d'água de 1 000 litros em 15 minutos.

Capacidade da caixa d'água (em litros)	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	x
Tempo que a torneira leva para encher a caixa d'água (em minutos)						

Um pedreiro sozinho faz a reforma de uma casa em 60 dias.

Número de pedreiros trabalhando juntos na reforma da casa	2	3	4	5	6	x
Tempo que levará para a reforma da casa ser concluída (em dias)						

A área de um quadrado é a medida do seu lado elevada ao quadrado.

Medida do lado do quadrado (em m)	1	$\sqrt{2}$	2,5	$2\sqrt{3}$	5,4	x
Área do quadrado (em m²)						

Dois números inteiros são chamados consecutivos quando sua diferença é 1. Por exemplo, são consecutivos os seguintes pares de números: -1 e 0, 7 e 8, 56 e 57 etc.

Número	1	5	9	13	17	x
Produto do número indicado acima pelo consecutivo maior que ele						

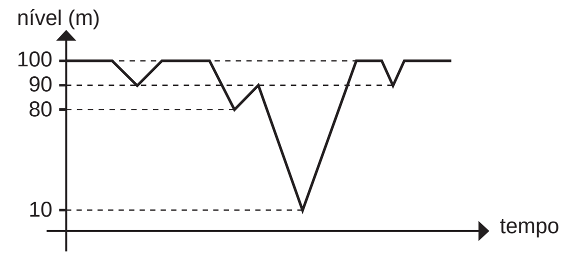
Um comerciante acrescenta 50% ao preço de custo das mercadorias para determinar o preço em que irá vendê-las.

Preço de custo (em R$)	10	12	14	16	20	X
Preço de venda (em R$)						

Aula 5 – Análise e interpretação de gráficos

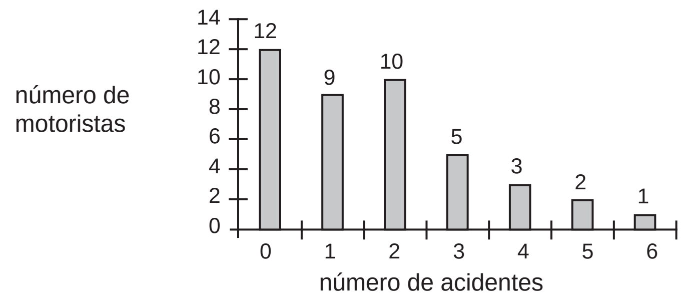
Nesta aula você vai praticar análise e interpretação da informação apresentada na forma de gráfico. Lembre-se que, muitas vezes, a resposta de um problema pode ser obtida apenas indiretamente, por meio do gráfico, o que quer dizer que será necessário fazer alguma operação aritmética com dados disponibilizados no gráfico para responder o problema.

1. O gráfico a seguir mostra o nível da água armazenada em uma barragem, ao longo de um ano. Analise-o atentamente e responda:



a) Qual foi o menor nível de água armazenada na barragem? E o maior?
b) Quantas vezes no ano a barragem atingiu o nível de 40 metros? E o nível de 95 metros?

2. O gráfico abaixo indica o resultado de uma pesquisa sobre o número de atropelamentos causados por 42 motoristas de táxi de uma determinada cidade, no período de um ano. Com base nos dados apresentados no gráfico, responda:

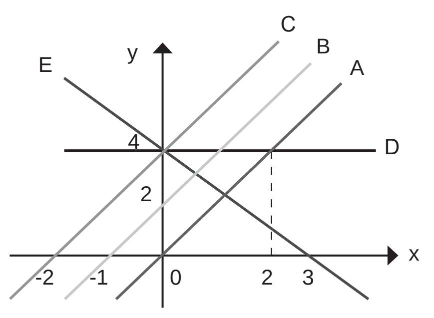


a) Qual é a porcentagem de motoristas de táxi dessa cidade que causaram três ou mais atropelamentos no período analisado? (A porcentagem pode ser dada com aproximação por um número inteiro. Exemplo: ≈ 43%)
b) Dentre os motoristas que causaram pelo menos um acidente, qual é a porcentagem dos que causaram quatro acidentes?

Aula 6 – Função afim e seu gráfico: variando o coeficiente linear

Uma função relacionando *y* e *x* que pode ser representada pela expressão $y = mx + n$, com *x* e *y* sendo números reais quaisquer, recebe o nome de função polinomial do primeiro grau, ou função afim. Inúmeras situações reais podem ser expressas por uma função afim, por isso dedicaremos especial atenção ao seu estudo nesta e nas próximas três aulas (aulas 7, 8 e 9). Discutiremos inicialmente a relação entre variações nos parâmetros *m* e *n* da função afim e as modificações no gráfico que representa a função. Em seguida a essa análise, você irá praticar o estudo da função afim em situações contextualizadas.

1. A, B, C, D e E são representações gráficas da função $y = mx + n$. Determine os valores de *m* e *n* em cada um dos cinco casos.

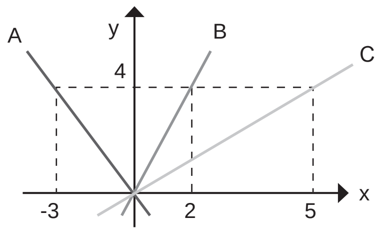


2. Analisando as equações obtidas no exercício anterior, responda:

a) As retas A, B e C são paralelas. O que caracteriza esse fato quando olhamos para a representação das funções na forma $y = mx + n$?
b) A reta D é paralela ao eixo *x*. O que caracteriza esse fato quando olhamos para a representação das funções na forma $y = mx + n$?
c) As retas B e D se intersectam em um único ponto. Determine as coordenadas desse ponto.
d) O ponto de intersecção de duas retas pode ser obtido diretamente a partir do gráfico (nos casos mais simples), ou a partir da resolução de um sistema de equações (nos casos menos óbvios). Determine as coordenadas dos pontos de intersecção das retas C e E; A e E.
e) Observe as funções que definem cada uma das retas e responda como podemos determinar, sem fazer cálculos, as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico dessas funções com o eixo *y*.
f) Resolva um sistema com as equações das retas C e B e discuta o resultado obtido.

Aula 7 – Função afim e o seu gráfico: variando o coeficiente angular

1. As retas A, B e C são representações gráficas da função y = mx, que é um caso particular da função y = mx+n, quando n = 0. Determine o valor de *m* em cada um dos três casos.



2. Analisando as equações obtidas no exercício anterior, responda:

a) As funções que definem as retas B e C possuem m > 0. Em casos assim, quanto maior o valor de *m*, a reta estará mais "em pé" ou mais "deitada"?
b) Como podemos saber se uma reta está inclinada para a direita ou para a esquerda apenas observando o valor de *m* na sua equação?
c) O coeficiente *m* da função y = mx + n é denominado coeficiente angular (ou declividade da reta), e o coeficiente *n* denominado coeficiente linear da reta. No caso das retas analisadas no exercício anterior, o coeficiente linear é zero, o que se deduz diretamente do fato das retas passarem pela origem do sistema de coordenadas. Justifique a frase a seguir a partir da análise dos gráficos dessas retas:
"O coeficiente angular de uma reta é a ***variação de y quando aumentamos x de uma unidade****"*.

Aulas 8 e 9 – Função afim em situações práticas

1. A conta de um restaurante é composta pelo valor total das despesas com comida e bebida mais 10% sobre esse valor, que correspondem aos gastos com serviços, e mais uma taxa fixa de R$ 10,00 de *couvert* artístico para os músicos.

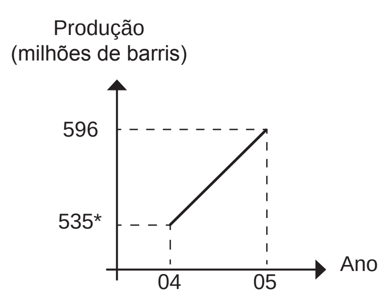
a) Chamando de *x* os gastos com comida e bebida (em R$), e *y* o valor total da conta (em R$), determine uma expressão do tipo y = mx + n que represente a relação entre *x* e *y*.
b) Faça um gráfico no plano cartesiano para representar a função encontrada no item anterior.
c) Sabe-se que os gastos em outro restaurante são dados pela função y = 1,5x + 2. Determine o valor de *x* para o qual os gastos nos dois restaurantes são iguais.

2. Celsius (C), Fahrenheit (F) e Kelvin (K) são as três escalas de temperatura mais utilizadas. Sabendo-se que a conversão entre as temperaturas (no nível do mar) nas escalas Fahrenheit-Celsius e Kelvin-Celsius são dadas, respectivamente, por *F = 1,8 C + 32 e K = C + 273*, pergunta-se:

a) Qual a temperatura de 95º F na escala Celsius? E na escala Kelvin?
b) Qual o ponto de congelamento e o ponto de ebulição da água na escala Fahrenheit?

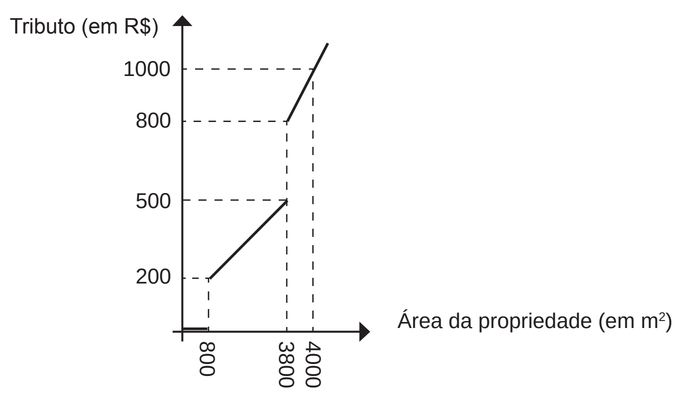
3. O gráfico abaixo indica a produção brasileira de petróleo, em milhões de barris, nos anos de 2004 e 2005:

Admitindo que a taxa de crescimento do período 2004-2005 se manteve no período 2005-2006, calcule o valor aproximado da produção média diária, em milhões de barris, no ano 2006.



Agência Nacional de Petróleo
(*) valor adaptado

4. O gráfico a seguir indica o valor de um determinado tributo territorial em função da área de uma propriedade.



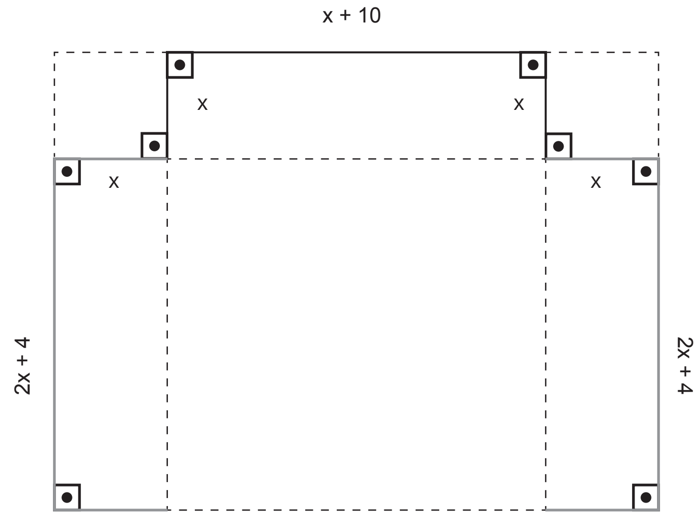
a) Qual o valor do imposto a pagar de uma propriedade de 800 m²?
b) Existe algum tamanho de propriedade (em m²) cujo imposto cobrado seja exatamente R$ 500,00?
c) Determine uma função do tipo y = mx + n, com *y* sendo o tributo em R$ e *x* a área em m², válida para o intervalo 800 ≤ x < 3800.

Aulas 10 e 11 – Inequações do 1º grau na resolução de problemas

Substituindo o sinal de igual da expressão y = mx + n pelo sinal >, <, ≥ ou ≤ teremos uma inequação do primeiro grau. Inúmeros problemas podem ser resolvidos com o auxílio de inequações, como problemas nos quais queremos determinar o valor de *x* para o qual *y* "não exceda" certo valor. Com os exercícios das aulas 10 e 11, você irá praticar o uso das inequações na resolução de problemas.

1. A figura indica uma folha de latão que será usada na montagem de uma peça:

a) Determine todos os valores possíveis de *x* (em metros) para que o perímetro da folha seja maior que ou igual a 64 m.



b) Determine todos os valores possíveis de *x* (em metros) para que a soma dos comprimentos representados em vermelho seja menor que a soma dos demais comprimentos que completam o perímetro da folha.

2. O custo C de produção de *x* litros de uma substância é dado pela fórmula C(x) = 1000 – 1,5x, com C dado em R$. A empresa que fabrica essa substância desenvolveu um novo processo de produção que pode ser feito ao custo C(x) = 940 – 1,4x. Pergunta-se:

a) Em qual dos dois processos a produção de 450 litros da substância é mais barata? E de 610 litros?
b) Determine todos os valores de *x* para os quais o novo processo de produção de *x* litros é mais barato do que no processo antigo.
Represente, em um mesmo gráfico, as duas funções do custo e assinale a região onde o custo do processo antigo é mais barato que o do processo novo.

3. Para enviar uma mensagem do Brasil para os Estados Unidos via fax, uma empresa cobra R$ 3,40 pela primeira página e R$ 2,60 por página que segue, completa ou não. Calcule o maior número de páginas possível de uma dessas mensagens para que seu preço ultrapasse o valor de R$ 136,00.

4. Em um concurso com 20 questões, para cada questão respondida corretamente o candidato ganha 3 pontos e para cada questão respondida erradamente ou não respondida, perde 1 ponto. Sabendo-se que para ser aprovado o candidato deve totalizar, nessa prova, um mínimo de 28 pontos, calcule o menor número de questões respondidas corretamente para que o candidato seja aprovado nesse concurso.

5. Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

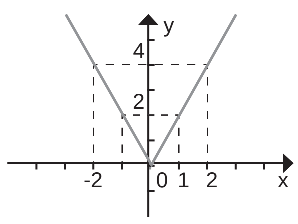
Aula 12 – Identificando gráficos de funções quadráticas

Vocês já viram que o conjunto dos pontos de uma função quadrática, quando representados no plano cartesiano, constituiu uma parábola. Cada ponto representado no gráfico é um par ordenado (x, y), cujos valores obedecem a uma relação dada pela lei de $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Agora, vamos analisar o gráfico de uma função e verificar se ela corresponde a uma função quadrática.

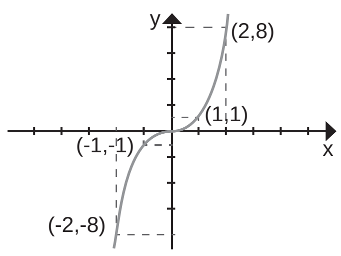
Os coeficientes *a* e *c* de uma função quadrática têm significados específicos na representação gráfica. Quando o coeficiente *a* é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima. Quando *a* é negativo, a concavidade é voltada para baixo. Para valores de *a* maiores que 1 ou menores que -1, a parábola apresenta um formato curvo mais acentuado. Para valores de *a* entre -1 e 1, diferente de zero, a parábola apresenta um formato curvo mais aberto, menos acentuado. O coeficiente *c* indica o ponto de intersecção da parábola com o eixo OY, isto é, o valor da função para x = 0. Se *c* é positivo, o gráfico cruza o eixo OY acima do eixo OX. Se for negativo, o gráfico cruza o eixo OY abaixo do eixo OX. Se *c* for igual a zero, o gráfico cruza a origem (0,0). Os exercícios a seguir explorarão a identificação de gráficos de funções quadráticas a partir dos parâmetros mencionados acima.

1. Apenas um dos gráficos abaixo representa a função $y = x^2$. A partir dos pontos assinalados, descubra qual deles corresponde à função mencionada.

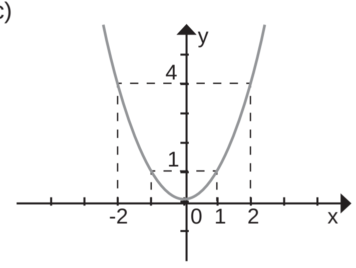
a)



b)



c)



2. Associe os gráficos abaixo às funções correspondentes:

Gráfico 1

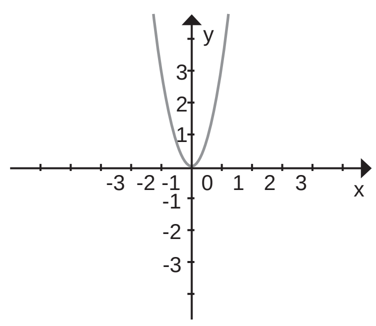


Gráfico 2

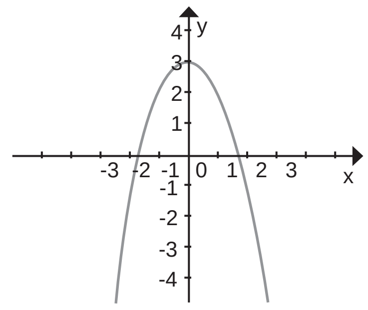


Gráfico 3

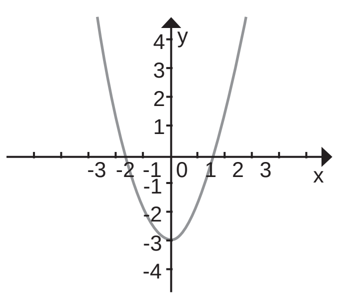


Gráfico 4

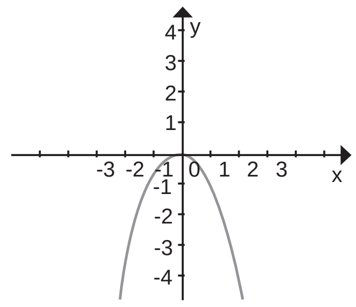


Gráfico 5

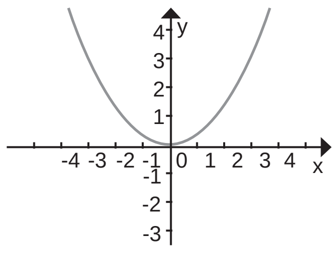
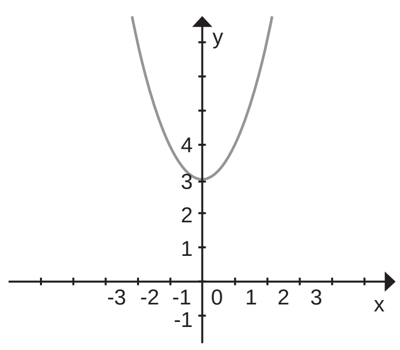


Gráfico 6



a) O gráfico ____ corresponde à $y = -x^2$.

b) O gráfico ____ corresponde à $y = \frac{1}{3}x^2$.

c) O gráfico ____ corresponde à $y = 3x^2$.

d) O gráfico ____ corresponde à $y = x^2 + 3$.

e) O gráfico ____ corresponde à $y = -x^2 + 3$.

f) O gráfico ____ corresponde à $y = -x^2 - 3$.

Aula 13 – Identificar uma função quadrática a partir de seu gráfico

A partir do gráfico de uma função quadrática, se conhecermos as coordenadas de pelo menos três de seus pontos, é possível determinar sua expressão algébrica. Para isso, basta substituir os pares ordenados (x, y) de cada ponto conhecido na forma $y = ax^2 + bx + c$. Obteremos, assim, um sistema linear de três equações com três incógnitas, a saber, os coeficientes *a*, *b* e *c*. Resolvendo este sistema, resultarão os valores dos coeficientes da função correspondente ao gráfico. Vejamos como isso funciona por meio de alguns exercícios.

1. Determine a expressão algébrica da função quadrática representada pelos seguintes gráficos:

Gráfico 1

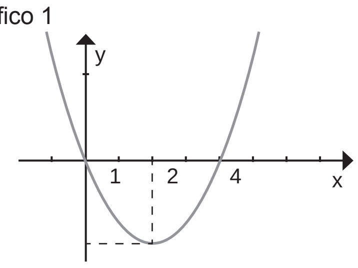


Gráfico 2

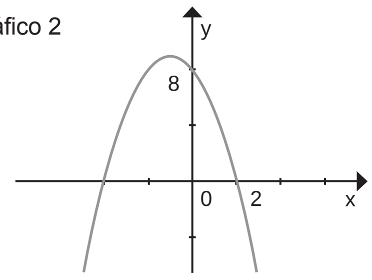
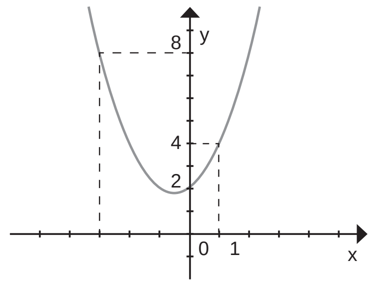
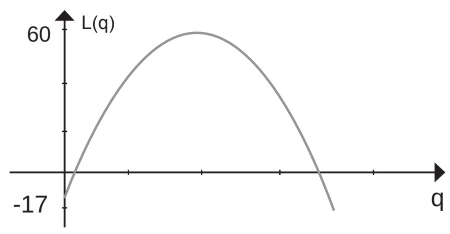


Gráfico 3



2. O gráfico abaixo representa a função **L(q)** do lucro bruto de uma empresa em função da quantidade produzida. Os valores de L são expressos em milhares de reais e a quantidade produzida *q* em milhares de unidades.



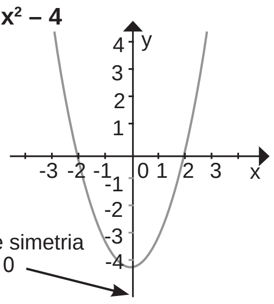
A partir das informações contidas no gráfico, responda:

a) Qual é a expressão algébrica que representa a função-lucro desta empresa?
b) Para quais quantidades produzidas a empresa obtém lucro positivo?
c) Qual a quantidade produzida que maximiza o lucro da empresa?
d) Por que o domínio desta função só admite valores positivos de *q*?
e) Qual o lucro que a empresa obtém para a produção de 15 000 unidades? E de 20 000 unidades?

Aula 14 – Simetria da parábola

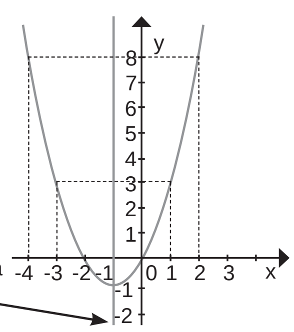
O gráfico cartesiano de uma função de equação **y = ax² + bx + c**, a 0, é uma parábola. A reta vertical que passa pelo vértice da parábola é seu eixo de simetria. Observe, por exemplo, os gráficos seguintes das funções:

(1) $\mathbf{y = x^2 - 4}$



Eixo de simetria em x = 0

(2) $\mathbf{y = x^2 + 2x}$

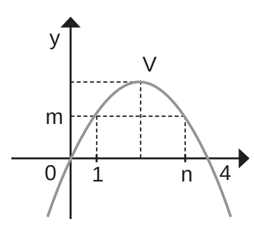


Eixo de simetria em x = -1

1. Na função (1), quando *x* = 1 qual é o valor correspondente de *y*?
2. Na função (2), quando *x* = 3, qual é o valor correspondente de *y*?
3. Complete a tabela com o valor correspondente de *x* ou de *y*.

Função 1	**x**	2	– 2	4		– 5	
	y				12		21
Função 2	**x**	– 3	1	6		– 5	
	y				16		27

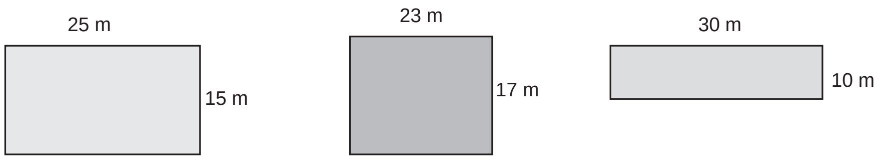
4. Ao lado está representado o gráfico da função de equação $y = -x^2 + 4x$.



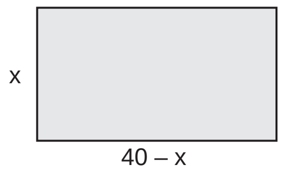
a) Quais são as coordenadas do ponto V, vértice da parábola?
b) Qual é o valor de *m*? E de *n*?

Aula 15 – Parábolas: contexto e aplicações

1. São inúmeras as possibilidades de cercar um pedaço retangular de terreno disponível do de 80 m de fio, como podemos perceber por estes exemplos:



Dentre todas as possibilidades, existe uma em que a área do retângulo é a maior possível. Qual é esse retângulo? Para descobrir, chamamos uma das medidas do retângulo de *x* e a outra ficará sendo 40 – x.



Sua área, *y*, nessas condições, é: $y = x \cdot (40 - x) \Rightarrow y = -x^2 + 40x$

a) Qual é a forma do gráfico da função que tem essa equação?
b) Determine as raízes da função, isto é, os valores de *x* para os quais y = 0, e faça um esboço do gráfico da função.
c) Qual é o valor de *x* para o qual a função tem valor máximo?
d) Qual é o maior valor de *y* possível para essa função?
e) Quais são as medidas do retângulo de maior área possível para a situação descrita? Qual é o valor dessa área?

2. Podemos dividir 20 em duas partes de várias maneiras, como, por exemplo, 2 e 18, 3 e 17, 6 e 14 etc. De modo geral, se uma parte for *x*, a outra será 20 – x . Quais são as partes no caso em que a soma do dobro de uma parte com o quadrado da outra é mínima?

Aula 16 – Inequações como perguntas

Uma inequação do 2º grau é uma pergunta do tipo "quais os valores de *x* que tornam verdadeira a desigualdade **$ax^2 + bx + c > 0$**" (ou <0, ou ≤ 0, ou ≥ 0), sendo *a*, *b* e *c* números fixados, com $a \neq 0$. Trata-se, portanto, de estudar o sinal da expressão $ax^2 + bx + c$. Existem casos simples em que o sinal de tal expressão pode ser facilmente conhecido. Sempre que tal expressão puder ser fatorada, por exemplo, o estudo do sinal reduz-se ao estudo do sinal desses fatores: um produto é positivo se os fatores tiverem sinais iguais; é negativo se os fatores tiverem sinais diferentes. Os exercícios a seguir explorarão tais situações.

1. Resolva as inequações:

a) $x^2 + 7 > 0$ b) $x^2 + 5 < 0$ c) $8x^2 + 1 \leq 0$
d) $x \cdot (x - 8) > 0$ e) $(x - 5) \cdot (x - 8) \leq 0$

2. Resolva as inequações:

a) $(x - 5)^2 > 0$ b) $(x+3)^2 < 0$ c) $(x + 5)^2 \geq 0$ d) $(x - 1)^2 \leq 0$

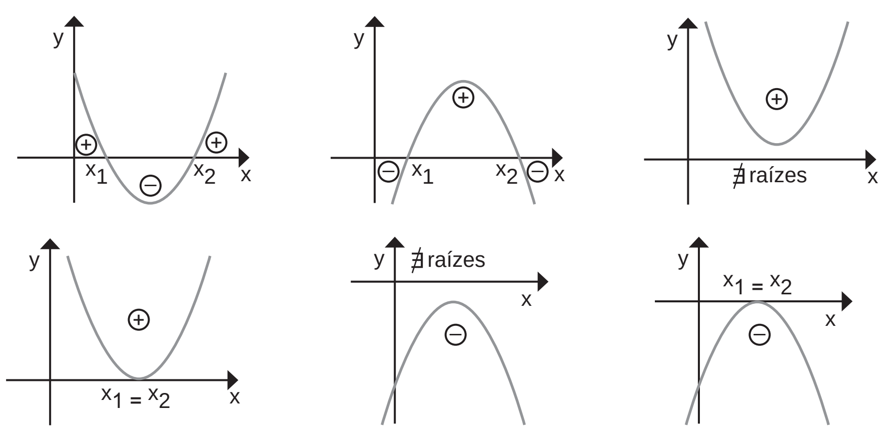
3. Resolva as inequações:

a) $(x+3)^2 + 5 > 0$ b) $x^2 + 10x + 27 > 0$
c) $(x + 5)^2 + 1 \geq 0$ d) $x^2 + 2x + 7 \leq 0$

Aula 17 – Inequações e raízes de $ax^2 + bx + c = 0$

Quando a equação **$ax^2+bx+c=0$** tem duas raízes distintas, a expressão **$y=ax^2+bx+c$** tem sinal contrário ao de *a* no intervalo entre as raízes e o mesmo sinal de *a* no restante da reta numerada.

Quando a expressão **$y=ax^2+bx+c$** é um quadrado perfeito, então ela se anula em apenas um ponto, tendo o mesmo sinal (sinal de *a*) em todos os outros; a equação **$ax^2+bx+c=0$** tem somente uma raiz real (dupla). Quando a equação **$ax^2+bx+c=0$** não tem raízes reais, então a expressão **$y=x^2+bx+c$** tem sempre o mesmo sinal (sinal de *a*). Os exercícios a seguir explorarão tais situações.



1. Encontre as raízes da equação $10x^2 - 3x - 7 = 0$ e resolva as inequações abaixo:

a) $10x^2 - 3x - 7 < 0$
b) $10x^2 - 3x - 7 \geq 0$
c) $10x^2 - 3x - 7 \leq 0$
d) $-10x^2 + 3x + 7 > 0$
e) $-10x^2 + 3x + 7 < 0$
f) $-10x^2 + 3x + 7 \leq 0$

2. Encontre as raízes da equação $-2x^2 - 3x + 20 = 0$ e resolva as inequações abaixo:

a) $-2x^2 - 3x + 20 < 0$
b) $-2x^2 - 3x + 20 > 0$
c) $2x^2 + 3x - 20 \leq 0$

Aula 18 – Inequações: contextos e aplicações

Examinaremos, a seguir, algumas expressões cujo sinal é importante estudar, em contextos práticos, e depararemos com inequações, como as das aulas anteriores. Vamos tentar?

1. A velocidade V com que uma xícara de chá esfria, em graus Celsius por minuto, é diretamente proporcional à diferença entre a temperatura T do chá e a temperatura A do ambiente, considerada constante: $V = k \cdot (T - A)$, sendo *k* uma constante positiva. Em certo ambiente, a uma temperatura de 20º C, o valor da constante *k* foi calculado experimentalmente e se obteve a igualdade $V = 0{,}3 \cdot (T - 20)$.

a) Calcule a velocidade V de resfriamento quando T = 90.
b) Calcule a velocidade V de resfriamento quando T = 40.
c) Mostre que sempre teremos $V \geq 0$, uma vez que a temperatura do chá nunca será menor do que a temperatura ambiente.

2. Em certo ambiente, a velocidade V de crescimento de uma população N é, em cada instante, diretamente proporcional ao valor de N, e também à diferença entre um valor limite L, estimado como o máximo admissível para uma vida sustentável no ambiente em questão, e o valor de N em cada instante: $V = k \cdot N \cdot (L - N)$, sendo *k* uma constante positiva. Sendo L = 100 000 habitantes, determine para quais valores de N a velocidade de crescimento da população é positiva, ou seja, a população cresce, e para quais valores de N a velocidade de crescimento é negativa, ou seja, a população decresce.

3. Em certa região, a velocidade V de propagação de certa doença é, em cada instante, diretamente proporcional ao número N de pessoas infectadas, e também à diferença entre o total da população P e o número de pessoas infectadas, ou seja, $V = k \cdot N \cdot (P - N)$, sendo *k* uma constante positiva. Sabendo que a população da região é de 200 000 habitantes, pergunta-se: para quais valores de N a velocidade de propagação da doença é positiva, ou seja, o número de doentes cresce, e para quais valores de N a velocidade de propagação da doença é negativa, ou seja, o número de doentes decresce?

Aula 19 – Logaritmos decimais: significado e aplicações

É possível escrever cada número N como uma potência de 10: **$N=10^n$**. O **expoente n** que corresponde ao número N chama-se **logaritmo de N** na base 10, e se escreve **n = log N.** O logaritmo de 10 é 1, o de 0,1 é -1, o de 100 é 2, o de 1000 é 3, o de 300 é um número entre 2 e 3: é possível calcular que $\log 300 \cong 2{,}47$. Os logaritmos podem simplificar muitos cálculos, mas são utilizados, modernamente, para representar grandezas que variam exponencialmente, ou seja, cuja variável está no expoente. Algumas situações envolvendo logaritmos serão exploradas nos exercícios seguintes.

1. Existem métodos de cálculo para os logaritmos dos números que não são potências inteiras de 10. Tais valores (aproximados, pois são números irracionais) podem ser obtidos por meio de calculadoras (ou encontrados em tabelas de logaritmos) e estão disponíveis para uso de todos. Os números entre 1 e 10 têm logaritmos entre 0 e 1. Em uma calculadora científica, obtemos: $\log 2 \cong 0{,}30$ (ou seja, $2 \cong 10^{0,30}$) e $\log 3 \cong 0{,}47$ (ou seja, $3 \cong 10^{0,47}$). Com base nesses valores aproximados, calcule:

a) log 6 b) log 9 c) log 4
d) log 12 e) log 72 f) log 3600

2. A população N de determinado município cresce exponencialmente, desde a sua fundação, há 20 anos, de acordo com a expressão $N = 3\,000 \cdot 10^{0,1t}$, sendo *t* em anos. Calcule:

a) o valor de N quando o município foi fundado (t = 0);
b) o valor de N dez anos após a fundação;
c) o valor de N nos dias atuais;
d) depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingiu 6000;
e) depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingiu 9000;
f) depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingiu 216000.

Aula 20 – Crescimento exponencial: potências e logaritmos

Potências e logaritmos misturam-se naturalmente em contextos práticos: afinal, o logaritmo não é mais do que um expoente... Vamos praticar?

1. A população de certa região A cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N_A = 6\,000 \cdot 10^{0,1t}$ (t em anos). Em outra região B, verifica-se que o crescimento da população ocorre de acordo com a fórmula $N_B = 600 \cdot 10^{0,2t}$ (t em anos). De acordo com esses modelos de crescimento, responda às questões abaixo:
a) Qual a população inicial de cada uma das regiões?
b) Depois de quantos anos, a partir do instante inicial, as duas regiões terão a mesma população?
c) Qual a população de cada uma das regiões 15 anos após o instante inicial? (Dado: $10^{3/2} \cong 31,62$)

2. A partir de um valor inicial igual a 1 000, certa população P_1 de bactérias dobra a cada meia hora, ou seja, $P_1 = 1000 \cdot 2^{2t}$ (t em horas). Simultaneamente, partindo de um valor inicial 8 vezes maior, outra população P_2 de bactérias cresce mais lentamente que P_1, dobrando de valor a cada duas horas, ou seja, $P_2 = 8000 \cdot 2^{0,5t}$ (t em horas). Pergunta-se:
a) Em que instante t as duas populações terão o mesmo valor?
b) Em que instante t a população P_1 será oito vezes maior que P_2?
c) Quais os valores de P_1 e P_2 quando t = 3?
(Use o valor aproximado $2^{3/2} \cong 2,83$.)

3. Certa substância radioativa se decompõe de tal forma que sua massa m reduz-se à metade do valor inicial a cada 4 horas, ou seja, $m = m_o \cdot 2^{-0,25t}$, sendo m_o o valor inicial da massa. Partindo-se de 60 g da substância, pergunta-se:
a) Qual será a massa restante após 8 horas?
b) Após quanto tempo a massa restante será igual a 12g?
(Use o valor aproximado $5 \cong 2^{2,32}$.)

Aula 21 – Logaritmos em qualquer base: significado e aplicações

Já vimos que é possível escrever cada número N como uma potência de 10: se $\mathbf{N = 10^n}$, então **n = log N**. Na verdade, pode-se escrever cada número **N** como uma potência de uma base **a**, que não necessita ser igual a 10. Se $\mathbf{N = a^n}$, então dizemos que **n é o logaritmo de N na base a**, e escrevemos: $\mathbf{n = \log_a N}$. Por exemplo, como $16 = 2^4$, dizemos que **4 é o logaritmo de 16 na base 2**, e escrevemos: $4 = \log_2 16$.

Nos exercícios seguintes, algumas situações envolvendo logaritmos em bases diferentes da base 10 serão exploradas.

1. Calcule os logaritmos indicados abaixo:
a) $\log_2 128$ b) $\log_3 81$ c) $\log_{11} 121$ d) $\log_5 3125$
e) $\log_2 (1/256)$ f) $\log_3 (1/243)$ g) $\log_{121} 11$ h) $\log_{125} 25$

2. Se um número N situa-se entre a^n e a^{n+1}, então $\log_a N$ situa-se entre os inteiros n e n+1. Com base neste fato, indique dois inteiros consecutivos entre os quais se situam os logaritmos abaixo:
a) $\log_2 52$ b) $\log_3 300$ c) $\log_7 400$ d) $\log_5 813$

3. Uma população N de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N = 5\,000 \cdot 3^t$ (t em horas). Indique o valor de t para o qual se tem:
a) N = 15 000 b) N = 25 000 c) N = 250 000 d) N = 350 000 e) N = 470 000
(Você pode indicar a resposta usando a notação dos logaritmos, sem precisar calculá-los; por exemplo, uma das respostas é $\log_3 50$. Nestes casos, indique dois inteiros consecutivos entre os quais o logaritmo se encontra.)

Aula 22 – Potências, logaritmos: uma linguagem sugestiva

Os logaritmos nada mais são que expoentes e podem ser utilizados para representar de modo sugestivo grandezas de valores muito elevados – como as energias liberadas por ocasião dos terremotos – ou muito pequenas – como as quantidades de íons de Hidrogênio livres em um líquido. Os exercícios seguintes ilustrarão tal fato.

1. A escala Richter, usada para medir a intensidade e o potencial destrutivo de um terremoto, é uma escala logarítmica de base 10. Isso significa que o grau de um terremoto é o expoente de uma potência de 10 que representa a energia liberada e que produz os estragos. Os aparelhos utilizados para medir a intensidade de terremotos são chamados sismógrafos. Com base em tal informação, responda às questões seguintes:

a) Um terremoto de 8 graus na escala Richter é potencialmente quantas vezes mais destrutivo do que um terremoto de 4 graus?
b) Um caminhão muito pesado passou pela rua e produziu um pequeno tremor; um sismógrafo registrou 2,5 graus na escala Richter. Se 4 caminhões passarem juntos pela rua, podemos afirmar que o tremor correspondente será de 10 graus?

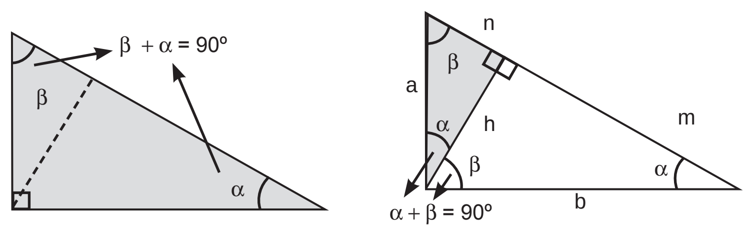
2. Para caracterizar a acidez de um líquido, usa-se um indicador – o pH (potencial hidrogeniônico). O pH indica a quantidade de íons H^+ que se encontram livres no líquido. A água tem pH próximo de 7, enquanto um líquido mais ácido, como uma limonada, tem um pH menor, digamos, 3, por exemplo. O significado do pH é o seguinte: na água, existe 1 íon-grama de H^+ em cada 10^7 litros – dizemos que o pH da água é 7; em um líquido de pH igual a 3 existe 1 íon-grama para cada 10^3 litros, e assim por diante. Com base nestas informações, responda às questões seguintes:

a) O que significa dizer que determinado líquido tem pH igual a 6?
b) Se um líquido tem 1 íon-grama de H^+ para cada 100 litros, qual o seu pH?
c) Se um líquido tem pH igual a 8, ele tem mais ou menos íons de Hidrogênio livres do que a água? Quantas vezes?
d) Qual a diferença entre os valores do pH de dois líquidos, um deles com mil vezes mais íons H^+ livres do que o outro?

Aula 23 – Triângulos retângulos: métrica e semelhança

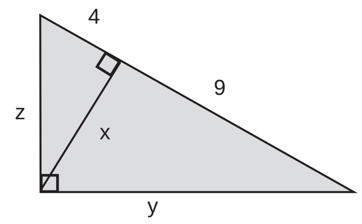
1. Traçando a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, são obtidos dois novos triângulos retângulos, semelhantes entre si, como representado na figura:

Desenhe separadamente os dois triângulos e escreva a proporção entre as medidas dos lados correspondentes.

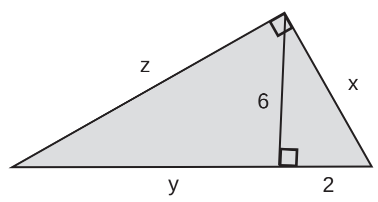


2. Determine as medidas x, y e z em cada figura:

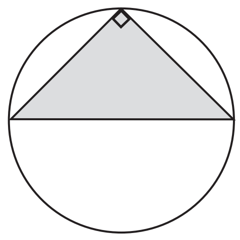
a)



b)

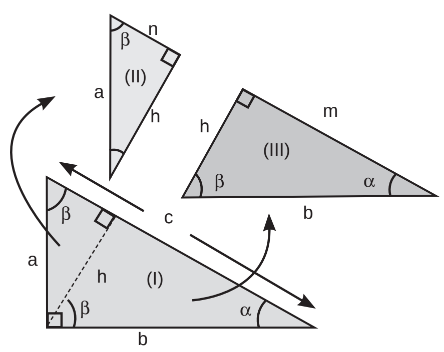


3. O triângulo retângulo representado na figura é isósceles e está inscrito em uma circunferência de raio 4 cm. Quais são as medidas dos lados desse triângulo?



Aula 24 – Triângulo retângulo: métrica e semelhança

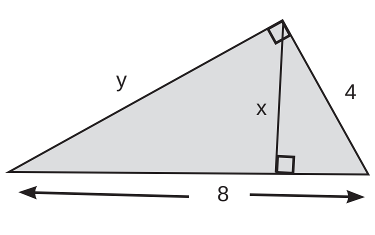
1. Observe a figura com o triângulo retângulo maior (I) sendo separado em dois triângulos retângulos menores (II) e (III) pela altura relativa à hipotenusa do triângulo maior. Os três triângulos são semelhantes, pois têm ângulos correspondentemente congruentes.



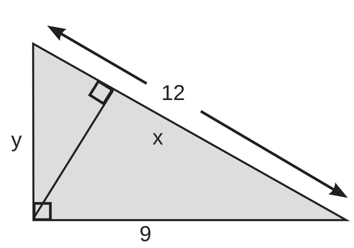
a) Escreva a proporção entre as medidas dos lados dos triângulos (I) e (II), e obtenha a relação: $\mathbf{a^2 = c \cdot n}$
b) Escreva a proporção entre as medidas dos lados dos triângulos (I) e (III) e obtenha a relação: $\mathbf{b^2 = c \cdot m}$

2. Determine as medidas x e y em cada triângulo.

a)

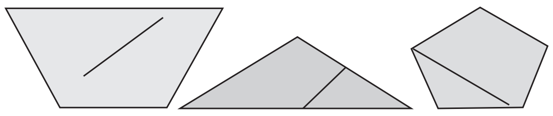


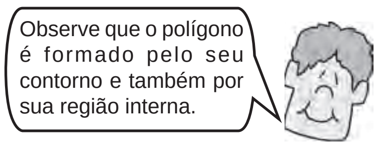
b)



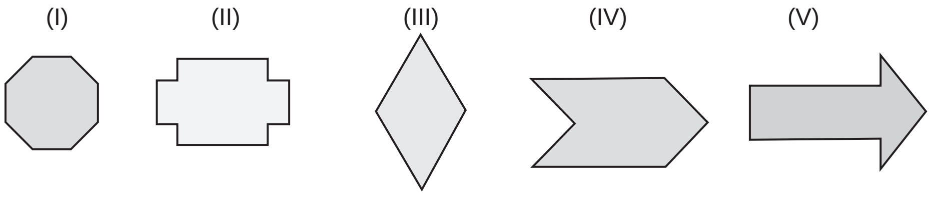
Aula 25 – As simetrias dos polígonos

1. Um polígono é *convexo* quando qualquer segmento unindo dois de seus pontos fica inteiramente contido no polígono, como nestes casos:

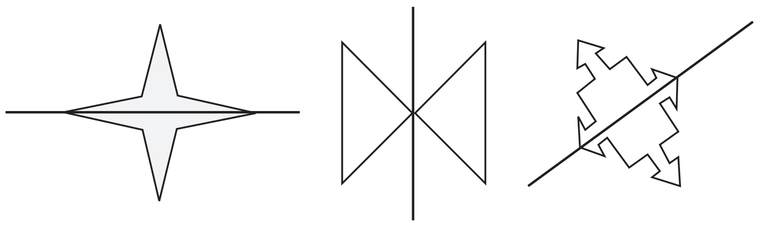




Quais dos polígonos seguintes são convexos?



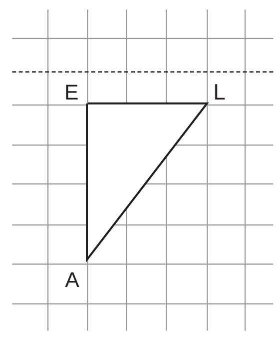
2. Observe as figuras. Elas são *simétricas* e em cada uma delas está desenhado um *eixo de simetria*, embora existam outros eixos de simetria não desenhados.



Desenhe outros eixos de simetria em cada uma dessas figuras, e depois responda: o que é preciso para que uma figura seja *simétrica*?

Aula 26 – As simetrias dos polígonos

1. Observe o triângulo retângulo ALE representado na malha quadriculada. De fato, ALE é apenas uma parte de uma figura plana simétrica. Desenhe a figura toda, calcule sua área e seu perímetro na unidade da malha, supondo que o eixo de simetria da figura coincida com a reta:

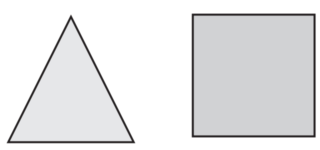


a) $\overline{EL}$ b) $\overline{AE}$
c) $\overline{AL}$ d) $\overline{LM}$

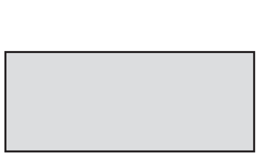
2. Classifique as figuras obtidas em cada item do exercício anterior, considerando a quantidade e as medidas de seus lados e de seus ângulos.

Aula 27 – Inscrições e circunscrição

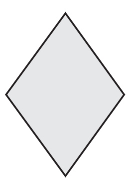
São chamados regulares os polígonos convexos que apresentam a mesma medida para todos seus lados, bem como para todos seus ângulos. Na ordem crescente do número de lados, os dois primeiros polígonos regulares são o triângulo eqüilátero e o quadrado.



Um polígono que tenha apenas ângulos congruentes ou então que tenha apenas lados congruentes não pode ser considerado regular, como é o caso dos seguintes exemplos:

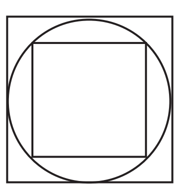


Este retângulo tem 4 ângulos internos de 90º, mas não é um polígono regular.



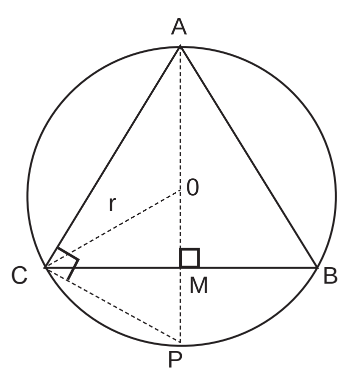
Este losango tem os 4 lados de mesma medida, mas não é um polígono regular.

1. A figura representa um quadrado inscrito e um circunscrito em uma única circunferência de raio 8 cm. Os vértices do quadrado inscrito estão sobre a circunferência, e os do circunscrito são tangentes à circunferência. Quanto mede:



a) o lado do quadrado circunscrito?
b) o lado do quadrado inscrito?

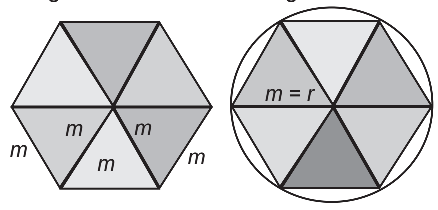
2. Um triângulo eqüilátero ABC de lado *n* está inscrito em uma circunferência de centro O e raio *r*. O ângulo ACP mede 90º pois o triângulo ACP está inscrito em uma semicircunferência. Observe a figura e responda quanto mede:



a) $\overline{CM}$ b) $\overline{OC}$
c) o ângulo ACM d) o ângulo OCM
e) o ângulo MCP f) $\overline{CP}$
g) $\overline{OP}$ h) $\overline{OM}$
i) $\overline{AM}$

Aula 28 – Inscrição e circunscrição

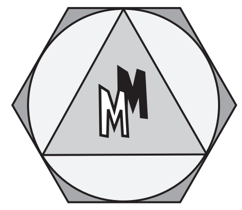
Observe como um hexágono regular pode ser composto por seis triângulos eqüiláteros congruentes, e observe também que ele pode ser inscrito em uma circunferência de raio cuja medida é igual à do lado do triângulo.



1. Para um hexágono regular de lado 8 cm calcule a medida de:

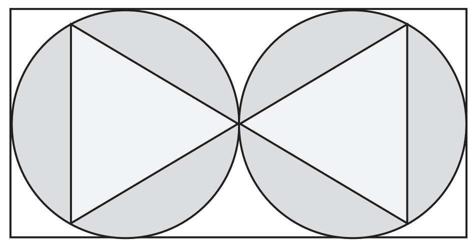
a) seu perímetro b) sua área c) um de seus ângulos internos

2. Um comerciante elaborou um logotipo para sua revenda formado por um hexágono regular circunscrito a uma circunferência de raio 4 cm que, por sua vez, circunscrevia uma triângulo eqüilátero, conforme representado na figura ao lado. Qual é, nesse logotipo, a medida:



a) do lado do triângulo? b) do lado do hexágono?

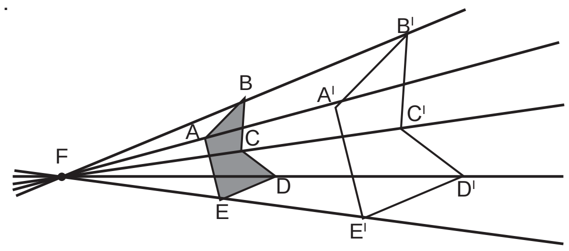
3. A figura ao lado é a representação de um quadro retangular em que a parte interna da moldura tem dimensões 20 cm e 40 cm. Se os círculos são tangentes à moldura e circunscrevem os triângulos eqüiláteros, calcule a medida:



a) do raio da circunferência
b) do lado do triângulo

Aula 29 – Semelhança: redução ou ampliação

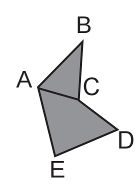
Observe a figura que representa a ampliação do polígono ABCDE, realizada com base nas linhas convergentes a um ponto F. Suponha que F esteja distante 6 cm de B e 9 cm de B'.



1. Se AB = 2 cm, quanto mede A'B'?

2. Os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E' são semelhantes, e a razão de semelhança é um valor *k*, tal que FA' = k · FA. Qual é a razão de semelhança nesse caso?

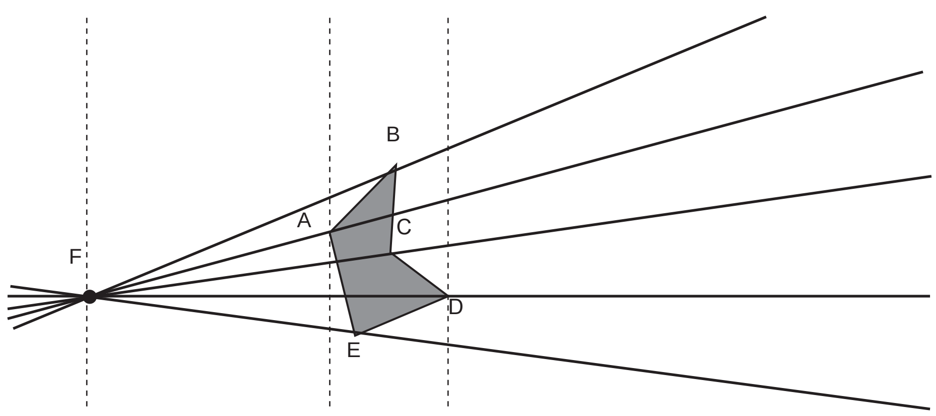
3. Considere que o triângulo ABC, na figura original, seja eqüilátero e que AB = 2 cm. Nesse caso,



a) calcule a área de ABC
b) calcule a área de A'B'C'
c) quantas vezes a área de A'B'C' é maior do que a área de ABC?

Aula 30 – Semelhança: redução ou ampliação

1. Desenhe na figura um polígono A''B''C''D''E'' que seja semelhante a ABCDE, com razão de semelhança 2,0.



2. A partir das descobertas que fez nos exercícios anteriores, faça uma figura, amplie-a e reduza-a, com a razão de semelhança que escolher.